ĐÁP ÁN TOÁN CHO KỸ SƯ 2

(ngày thi 23/7/2020)

<table>
<tr><th>Câu hỏi</th><th>Nội dung</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td><u>Câu1</u></td><td></td><td>3đ</td></tr>
<tr><td>a)

2đ</td><td>
Tên các cách giải hệ phương trình tuyến tính: Phương pháp Gauss (Gauss-Jordan), phương pháp Cramer (sử dụng định thức), phương pháp ma trận đảo, phương pháp cộng-trừ đại số kết hợp phương pháp thế, ngoài ra còn có thể sử dụng máy tính (casio hoặc PC/Latop có cài đặt các phần mềm phù hợp như excel, matlab, maple,…).
<u>Cách 1</u> Phương pháp Cramer
$$D=\begin{vmatrix}2&1&1\\5&2&m\\4&2&m\end{vmatrix}=2-m;\ D_x=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&2&m\\2-m&2&m\end{vmatrix}=(2-m)(m-1)$$
$$D_y=\begin{vmatrix}2&0&1\\5&1&m\\4&2-m&m\end{vmatrix}=(2-m)(3-2m);\ D_z=\begin{vmatrix}2&1&0\\5&2&1\\4&2&2-m\end{vmatrix}=m-2$$
-Trường hợp $m\neq 2$: $D\neq 0$ nên hệ phương trình có nghiệm duy nhất
$$\begin{cases}x=\dfrac{D_x}{D}=m-1\\ y=\dfrac{D_y}{D}=3-2m\\ z=\dfrac{D_z}{D}=-1\end{cases}$$
- Trường hợp $m=2$: $D=D_x=D_y=D_z=0$
$$\begin{cases}2x+y+z=0\\5x+2y+z=1\\4x+2y+2z=0\end{cases}$$
$$\overline{A}=\begin{pmatrix}2&1&1&:&0\\5&2&2&:&1\\4&2&2&:&0\end{pmatrix}\to\ldots\to\begin{pmatrix}1&0&0&:&1\\0&1&1&:&-2\\0&0&0&:&0\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-2-\alpha\\z=\alpha\end{cases},\ \forall\alpha\in\mathbb{R}\ \text{(hệ có vô số nghiệm và có 1 ẩn tự do)}$$
<u>Kết luận</u>
</td><td>0.5đ

0.25đ

0.25đ

0.5đ</td></tr>
</table>

	▪ $m \neq 2$: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = m-1 \\ y = 3-2m \\ z = -1 \end{cases}$ ▪ $m = 2$: Hệ phương trình có vô số nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 - \alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (1 ẩn tự do)	**0.5đ**
	Cách 2 Phương pháp Gauss. Lập ma trận bổ sung $\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & : & 0 \\ 5 & 2 & m & : & 1 \\ 4 & 2 & m & : & 2-m \end{pmatrix} \to \dots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & m-2 & : & 1 \\ 0 & 1 & 5-2m & : & -2 \\ 0 & 0 & m-2 & : & 2-m \end{pmatrix}$	**0.5đ**
	$m \neq 2$: Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} x \quad + (m-2)z = 1 \\ \quad y + (5-2m)z = -2 \\ \quad (m-2)z = 2-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m-1 \\ y = 3-2m \\ z = -1 \end{cases}$	**0.5đ**
	$m = 2$: Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} x \quad + 0.z = 1 \\ \quad y + z = -2 \\ \quad 0.z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 - \alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (hệ có vô số nghiệm-1 ẩn tự do) *<u>Kết luận</u>* ▪ $m \neq 2$: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = m-1 \\ y = 3-2m \\ z = -1 \end{cases}$ $m = 2$: Hệ phương trình có vô số nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 - \alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (1 ẩn tự do)	**0.5đ**
b) ***1đ***	Hệ phương trình tương đương với $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ E_2 - E_1 \\ E_3 - E_2 \end{pmatrix}}_{B} \Leftrightarrow AX = B$	**0.25đ**
	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{vmatrix} = R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3$ Vì R_1, R_2, R_3 là các hằng số dương nên $\det A \neq 0$, do đó tồn tại A^{-1}.	**0.5đ**

	$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$ Vậy đẳng thức $X = A^{-1}B$ đúng.	***0.25đ***
Câu 2		***3.5đ***
a) ***0.5đ***	Nghiệm tổng quát hệ $X'(t) = AX(t) + F(t)$ là $$X(t) = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + X_p(t) = C_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{-3t} + C_2\begin{pmatrix}10\\-1\\1\end{pmatrix}e^{-4t} + C_3\begin{pmatrix}1\\8\\1\end{pmatrix}e^{t} + \begin{pmatrix}3e^{2t}\\te^{2t}\\7e^{2t}\end{pmatrix}$$ với $C_1, C_2, C_3 = consts$.	***0.5đ***
b) ***1đ***	***Phương pháp biến thiên hằng số (Variation of Parameters)*** Giải hệ phương trình vi phân tuyến tính ***không thuần nhất*** $X'(t) = AX(t) + F(t)$, với $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{n\times n}$, bằng phương pháp biến thiên hằng số như sau: ***Bước 1*** Giải hệ phương trình vi phân thuần nhất tương ứng $X'(t) = AX(t)$ tìm hệ nghiệm cơ bản $X_1 = \begin{pmatrix}x_{11}(t)\\x_{21}(t)\\\vdots\\x_{n1}(t)\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}x_{12}(t)\\x_{22}(t)\\\vdots\\x_{n2}(t)\end{pmatrix}$,..., $X_n = \begin{pmatrix}x_{1n}(t)\\x_{2n}(t)\\\vdots\\x_{nn}(t)\end{pmatrix}$. Nghiệm tổng quát hệ $X'(t) = AX(t)$ là $$X_o(t) = C_1\begin{pmatrix}x_{11}(t)\\x_{21}(t)\\\vdots\\x_{n1}(t)\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}x_{12}(t)\\x_{22}(t)\\\vdots\\x_{n2}(t)\end{pmatrix} + \ldots + C_n\begin{pmatrix}x_{1n}(t)\\x_{2n}(t)\\\vdots\\x_{nn}(t)\end{pmatrix}$$ với $C_1, C_2, ..., C_n = conts$. ***Bước 2*** (***Biến thiên hằng số***) Nghiệm tổng quát hệ $X'(t) = AX(t) + F(t)$ là $$X(t) = C_1(t)\begin{pmatrix}x_{11}(t)\\x_{21}(t)\\\vdots\\x_{n1}(t)\end{pmatrix} + C_2(t)\begin{pmatrix}x_{12}(t)\\x_{22}(t)\\\vdots\\x_{n2}(t)\end{pmatrix} + \ldots + C_n(t)\begin{pmatrix}x_{1n}(t)\\x_{2n}(t)\\\vdots\\x_{nn}(t)\end{pmatrix} =$$ $$\begin{pmatrix}x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t)\\x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t)\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1(t)\\C_2(t)\\\vdots\\C_n(t)\end{pmatrix} \quad (*)$$ Trong đó $C_1(t), C_2(t), ..., C_n(t)$ xác định từ hệ $$\underbrace{\begin{pmatrix}x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t)\\x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t)\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t)\end{pmatrix}}_{\Phi(t)}\underbrace{\begin{pmatrix}C_1'(t)\\C_2'(t)\\\vdots\\C_n'(t)\end{pmatrix}}_{C'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\\\vdots\\f_n(t)\end{pmatrix}}_{F(t)} \quad (**)$$	 ***0,5đ*** ***0,5đ***

Giải hệ (**) được $\begin{cases} C_1'(t)=[\ ] \\ C_2'(t)=[\ ] \\ \vdots \\ C_n'(t)=[\ ] \end{cases} \xrightarrow{\text{tích phân}} \begin{cases} C_1(t)=\int[\ ]dt+K_1 \\ C_2(t)=\int[\ ]dt+K_2 \\ \vdots \\ C_n(t)=\int[\ ]dt+K_n \end{cases}$ với $K_1,K_2,...,K_n = conts$, rồi thay vào (*) ta được nghiệm tổng quát của phương trình $X'(t)=AX(t)+F(t)$.

<u>Lưu ý</u> Nếu sử dụng ma trận đảo giải (**) ta được:

$$\Phi(t)C'(t)=F(t) \Leftrightarrow C'(t)=\Phi^{-1}(t)F(t) \Leftrightarrow C(t)=\int \Phi^{-1}(t)F(t)dt+K$$

c) ***2đ***

<u>Cách 1</u> ***Phương pháp biến thiên hằng số (Variation of Parameters)***

Hệ phương trình được viết lại

$$\begin{cases} x'=2y+e^{-5t} \\ y'=-x-3y+12 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-5t} \\ 12 \end{pmatrix}}_{F(t)} \Leftrightarrow X'(t)=AX(t)+F(t)$$

Giải hệ thuần nhất tương ứng $\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X}$

$$\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda^2+3\lambda+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda=-1 \\ \lambda=-2 \end{array}\right.$$ ***0,5đ***

$*\lambda$ = -1 $\xrightarrow{\text{vectơ riêng cơ sở}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ và nghiệm cơ bản $\to X_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t}$

$*\lambda$ = -2 $\xrightarrow{\text{vectơ riêng cơ sở}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ và nghiệm cơ bản $\to X_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-2t}$

Nghiệm tổng quát hệ thuần nhất: $X_o = C_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-2t}; C_1,C_2=conts$ ***0,5đ***

Nghiệm tổng quát hệ thuần nhất: $X(t) = C_1(t)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + C_2(t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-2t}$ (*)

Trong đó $C_1(t), C_2(t)$ xác định từ hệ

$$\begin{pmatrix} -2e^{-t} & e^{-2t} \\ e^{-t} & -e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-5t} \\ 12 \end{pmatrix} \quad (**)$$

Giải (**) được

$$\begin{cases} C_1'(t)=-e^{-4t}-12e^{t} \\ C_2'(t)=-24e^{2t}-e^{-3t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(t)=\int(-e^{-4t}-12e^{t})dt+K_1 \\ C_2(t)=\int(-24e^{2t}-e^{-3t})dt+K_2 \end{cases}, \ K_1,K_2=conts$$

$\Rightarrow \begin{cases} C_1(t)=\dfrac{1}{4}e^{-4t}-12e^{t}+K_1 \\ C_2(t)=-12e^{2t}+\dfrac{1}{3}e^{-3t}+K_2 \end{cases}$ với $K_1,K_2=conts$. Thay vào (*) được nghiệm

	$X(t)=(\frac{1}{4}e^{-4t}-12e^{t}+K_1)\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}e^{-t}+(-12e^{2t}+\frac{1}{3}e^{-3t}+K_2)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-2t}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2K_1e^{-t}+K_2e^{-2t}-\frac{1}{6}e^{-5t}+12\\ y=K_1e^{-t}-K_2e^{-2t}-\frac{1}{12}e^{-5t}\end{cases}$ với $K_1,K_2=conts$ $\begin{cases}x(0)&=0\\y(0)&=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2K_1+K_2-\frac{1}{6}+12=0\\ K_1-K_2-\frac{1}{12}\quad=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}K_1&=\frac{47}{4}\\K_2&=\frac{35}{3}\end{cases}$ Vậy nghiệm cần tìm $\begin{cases}x=-\frac{47}{2}e^{-t}+\frac{35}{3}e^{-2t}-\frac{1}{6}e^{-5t}+12\\ y=\frac{47}{4}e^{-t}-\frac{35}{3}e^{-2t}-\frac{1}{12}e^{-5t}\end{cases}$ $\begin{cases}\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}(-\frac{47}{2}e^{-t}+\frac{35}{3}e^{-2t}-\frac{1}{6}e^{-5t}+12)=12\\ \lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}(\frac{47}{4}e^{-t}-\frac{35}{3}e^{-2t}-\frac{1}{12}e^{-5t})\quad=\quad0\end{cases}$ Sau khoảng thời gian t đủ lớn, tọa độ gần đúng trong mặt phẳng Oxy của điểm $M(x(t);y(t))$ là (12;0).	***0,5đ*** ***0,5đ***
c) ***2đ***	***<u>Cách 2</u>*** Áp dụng phép biến đổi Laplace Đặt $X=\mathscr{L}[x], Y=\mathscr{L}[y]$; biến đổi Laplace hai vế ta được: $\begin{cases}\mathscr{L}[x']-2\mathscr{L}[y]=\mathscr{L}[e^{-5t}]\\ \mathscr{L}[x]+\mathscr{L}[y']+3\mathscr{L}[y]=\mathscr{L}[12]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}sX-2Y=\frac{1}{s+5}\\ X+(s+3)Y=\frac{12}{s}\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}X=\frac{s^2+27s+120}{s(s+2)(s+1)(s+7)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s+2}+\frac{D}{s+5}\\ Y=\frac{12s+59}{(s+2)(s+1)(s+7)}=\frac{E}{s+1}+\frac{F}{s+2}+\frac{G}{s+5}\end{cases}$ Biến đổi ngược hai vế ta được: $\begin{cases}x=\mathscr{L}^{-1}[X]\\ y=\mathscr{L}^{-1}[Y]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\mathscr{L}^{-1}[A\frac{1}{s}+B\frac{1}{s+1}+C\frac{1}{s+2}+\frac{D}{s+5}]\\ y=\mathscr{L}^{-1}[E\frac{1}{s+1}+F\frac{1}{s+2}+G\frac{1}{s+5}]\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x=A+Be^{-t}+Ce^{-2t}+De^{-5t}\\ y=Ee^{-t}+Fe^{-2t}+Ge^{-5t}\end{cases}$ $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}(A+Be^{-t}+Ce^{-2t}+De^{-5t})=A$ $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}(Ee^{-t}+Fe^{-2t}+Ge^{-5t})=0$ Sau khoảng thời gian t đủ lớn, tọa độ gần đúng trong mặt phẳng Oxy của	***0.75đ*** ***0.25đ*** ***0.5đ***

điểm $M(x(t);y(t))$ là $(A;0)\equiv(12;0)$. **0.5đ**

- Tìm A,B,C,D dựa vào

$$\frac{s^2+27s+120}{s(s+1)(s+2)(s+5)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s+2}+\frac{D}{s+5}$$

$$A=\frac{0^2+27\times 0+120}{(0+1)(0+2)(0+5)}=12,\qquad B=\frac{(-1)^2+27\times(-1)+120}{(-1)(-1+2)(-1+5)}=-\frac{47}{2},$$

$$C=\frac{(-2)^2+27\times(-2)+120}{(-2)(-2+1)(-2+5)}=\frac{35}{3}\qquad D=\frac{(-5)^2+27\times(-5)+120}{(-5)(-5+1)(-5+2)}=-\frac{1}{6}$$

- Tìm E,F,G dựa vào

$$\frac{12s+59}{(s+1)(s+2)(s+5)}=\frac{E}{s+1}+\frac{F}{s+2}+\frac{G}{s+5}$$

$$E=\frac{12\times(-1)+59}{(-1+2)(-1+5)}=\frac{47}{4},\qquad F=\frac{12\times(-2)+59}{(-2+1)(-2+5)}=-\frac{35}{3}$$

$$G=\frac{12\times(-5)+59}{(-5+1)(-5+2)}=\frac{-1}{12}$$

Vậy nghiệm hệ phương trình là $\begin{cases} x=12-\dfrac{47}{2}e^{-t}+\dfrac{35}{3}e^{-2t}-\dfrac{1}{6}e^{-5t} \\ y=\dfrac{47}{4}e^{-t}-\dfrac{35}{3}e^{-2t}-\dfrac{1}{12}e^{-5t} \end{cases}$

Lưu ý Ngoài hai phương pháp này có thể giải bằng phương pháp khử và thế.

Câu 4 3,5đ

a) 0,5đ

Đặt: $x=r\sin\theta\cos\phi$, $y=r\sin\theta\sin\phi$, $z=r\cos\theta$

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}\Leftrightarrow k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}$$ 0,5đ

b) 1,5đ

Áp dụng bài toán truyền sóng một chiều

PT: $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad 0<x<L,\ t>0$

BC: $u(0,t)=0,\qquad u(L,t)=0,\ t>0$

IC: $u(x,0)=f(x),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x),\ 0<x<L.$

Nghiệm

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{L}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x.}$$

	Với A_n, B_n xác định như sau $$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx.$$ Với $L=\pi$, $f(x)=x(\pi-x)$, $g(x)=0$ $$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nat + B_n\sin nat)\sin nx$$ $A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi-x)\sin nx dx$ (áp dụng tích phân từng phần) $= \frac{2}{\pi}\left(x(x-\pi)\frac{\cos nx}{n}\Big\vert_0^{\pi} + \frac{1}{n}(\pi-2x)\frac{\sin nx}{n}\Big\vert_0^{\pi} - \frac{2}{n^3}\cos nx\Big\vert_0^{\pi}\right)$ $= \frac{4}{\pi n^3}\left(1+(-1)^{n+1}\right)$ $B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^{\pi} 0.\sin nx dx = 0$ Vậy nghiệm bài toán cần giải là $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4+4(-1)^{n+1}}{\pi n^3}\cos nat + 0.\sin nat\right)\sin nx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4+4(-1)^{n+1}}{\pi n^3}\cos nat\sin nx$	0,5*đ* 0,5*đ* 0,25*đ* 0,25*đ*
c) 1,5*đ*	Giải phương trình truyền nhiệt $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+e^{-x}=\frac{\partial u}{\partial t}$, $0<x<1$, $t>0$ với điều kiện $\begin{cases} u(0,t)=0, \quad u(1,t)=0, \quad t>0 & (BC) \\ u(x,0)=1-e^{-x} \quad 0<x<1 & (IC)\end{cases}$ Đây là phương trình không thuần nhất nên ta đổi biến $u(x,t)=v(x,t)+\psi(x)$ $\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}+\psi'(x) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\psi''(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}\end{cases}$, rồi thay vào phương trình $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+e^{-x}=\frac{\partial u}{\partial t}$ ta được $$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\underbrace{\psi''(x)+e^{-x}}_{0}=\frac{\partial v}{\partial t}$$ Thay các điều kiện (BC) &(IC) vào đưa bài toán cần giải về hai bài toán **Bài toán 1**: $\psi''(x)+e^{-x}=0$ với $\psi(0)=0, \psi(1)=0$ **Bài toán 2**: $\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial v}{\partial t}, 0<x<1, t>0 \\ v(0,t)=0, v(1,t)=0 \quad (BC) \\ v(x,0)=1-e^{-x}-\psi(x) \quad (IC)\end{cases}$ Giải bài toán 1: $\psi''(x)+e^{-x}=0 \Rightarrow \psi'(x)=-\int e^{-x}dx + C_1 = e^{-x}+C_1$	0,5*đ*

$$\Rightarrow \psi(x) = \int (e^{-x} + C_1)dx + C_2 = -e^{-x} + C_1 x + C_2$$

$$\psi(0) = 0, \psi(1) = 0 \begin{cases} -1 + C_2 = 0 \\ -e^{-1} + C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = e^{-1} - 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$ 0,5*đ*

$$\Rightarrow \psi(x) = 1 - e^{-x} + (e^{-1} - 1)x$$

Thay vào bài toán 2 được $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{\partial v}{\partial t}, 0 < x < 1, t > 0 \\ v(0,t) = 0, v(1,t) = 0 \quad \text{(BC)} \\ v(x,0) = (1 - e^{-1})x \quad \text{(IC)} \end{cases}$

<u>Áp dụng</u> bài toán truyền nhiệt một chiều (thuần nhất)

PT: $k \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$

BC: $u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0$

IC: $u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L.$

Nghiệm:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx\right)e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}\sin\frac{n\pi}{L}x.}$$

Suy ra nghiệm *<u>bài toán 2</u>* này là

$$v(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1 (1 - e^{-1})x\sin n\pi x\,dx\right)e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left((1 - e^{-1})\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\right)e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x \qquad \text{(tính tích phân từng phần)}$$ 0,5*đ*

Vậy nghiệm bài toán cần giải là

$$u(x,t) = v(x,t) + \psi(x) = 1 - e^{-x} + (e^{-1} - 1)x + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left((1 - e^{-1})\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\right)e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x$$

....***Hết***...